# Maturitní příklady 2011/2012

## *1. Výroková logika, množiny, důkazy*

1. Ve třídě je 20 dívek a 15 hochů. Jedna čtvrtina dívek nosí brýle a celkem 20% žáků ve třídě má brýle. Kolik hochů nenosí brýle?
2. Ze 100 studentů se 30 učí německy, 28 španělsky a 42 francouzsky. Víme, že osm studentů se učí španělsky a německy, 10 studentů se učí španělsky a francouzsky, 5 studentů se učí německy a francouzsky. Všechny jazyky se učí 3 studenti. Určete:
   a) Kolik studentů se neučí žádný jazyk?
   b) Kolik studentů se učí jen francouzsky?
   c) Kolik studentů se učí německy, ale ne francouzsky?

3. Ve městě jsou tři benzínová čerpadla, pro jejichž provoz platí:
   a) v provozu je vždy čerpadlo A nebo C
   b) čerpadlo C není v provozu právě tehdy když je otevřeno čerpadlo A
   c) je-li otevřeno čerpadlo C, potom není v provozu čerpadlo A a je otevřeno čerpadlo B

   Určete všechny možnosti provozu všech tří čerpadel.

4. Při vyšetřování dopravní nehody bylo zjištěno:
   a) nehodu zavinil řidič B nebo řidič C
   b) jestliže nehodu zavinil řidič C, zavinil ji i řidič A
   c) nehodu zavinil řidič B, jestliže ji zavinil řidič A
   d) jestliže nehodu zavinil řidič B, potom ji nezavinil řidič C.

   Kdo zavinil nehodu?
5. Dokažte, že pro reálná *a, b,* kde $0 \le a \le b$ platí: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a.b}$ .

6. Dokažte: Jestliže zápis přirozeného čísla končí číslicí 5, potom jeho druhá mocnina končí 25.

7. Proveďte negace následujících výroků:
   A: Aspoň dva žáci dnes přišli pozdě.
   B: Sním nejvýše čtyři knedlíky.
   C: Každý trojúhelník má tři úhly.
   D: Žádný protest nebyl podán.
   E: Máme pivo a minerálky.
   F: Jestliže budu obědvat rybu, budu pít víno.
   G: Nemám hlad a nemám žízeň.
   H: Bude-li ke koupi čerstvé ovoce, nekoupím kompot.
   I : Pomeranče koupím právě tehdy, nebudou-li citrony.

8. Pomocí Vennových diagramů rozhodněte, zda pro všechny podmnožiny A,B,C dané základní množiny U platí:
   a. $(A\,U\,B) \cap C' = (A \cap C')\,U\,(B \cap C')$
   b. $(A\,U\,B) \cap (A\,U\,C)' = A\,U\,(B \cap C')$

## *2. Mocniny, odmocniny, iracionální rovnice a nerovnice*

1. Řešte v R: $\sqrt{10-x} + \sqrt{x-8} = 2$

2. Řešte v R: $\sqrt{x+3-4\sqrt{1-x}}=1+\sqrt{x}$

3. Zjednodušte:

$$\frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}:\left(\frac{\sqrt{b}-\dfrac{a}{(a.b)^{-0,5}}}{1-a}-\sqrt{a.b}\right)+\frac{a}{b}.\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

4. Zjednodušte :

$$\frac{1}{2}.\left(\sqrt{x^2-a}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right)+\frac{a}{2}.\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

5. Řešte v R nerovnici: $\sqrt{x^2-x-2}\langle x-3$

6. Řešte v R nerovnici: $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}\langle\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

7. Řešte v R rovnici: $2\sqrt{x+2}+\sqrt{2-4x}=\sqrt{10}$

8. Řešte v R rovnici: $\sqrt{3.(x+4)}-\sqrt{x+1}=\sqrt{4x+13}$

9. Řešte v R rovnici: $\sqrt{x+1-2\sqrt{8-x}}=\sqrt{x}$

10. Řešte v R rovnici: $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$

## *3. Exponenciální funkce, rovnice a nerovnice*

1. $\sqrt[5]{x^{\log_3 x}} = 243$

2. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

3. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5.2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$

4. Je dán vzorec $y = a.\left(\frac{1}{2}\right)^x + b$
   a. Stanovte reálná čísla a,b tak, aby vzorec určoval funkci h, pro kterou platí, že
      - je definovaná v intervalu J=$\langle -1;4 \rangle$
      - $h(x_1) = 6$, $h(x_2) = -\frac{7}{4}$, kde $x_1 \in$ J je bod, v němž má h maximum, $x_2 \in$J je bod, v němž je minimum funkce h.
   b. V kterých bodech protne graf funkce h osy soustavy souřadnic?
   c. Je h sudá funkce?
   d. Načrtněte graf funkce h.
   e. Funkce h a $h_1$ jsou určeny týmž vzorcem, avšak $D(h_1) = R$. Určete $H(h_1)$

5. Je dána funkce *f*: $y = 3^{ax} + b$
   a. Pro která reálná čísla $a, b$ prochází graf funkce *f* body $A[-1;-1], B[0;-3]$?
   b. Zapište definiční obor a obor hodnot funkce, načrtněte graf funkce.
   c. Zdůvodněte, proč k funkci $f$ je možné určit funkci inverzní $f^{-1}$. Jaký je definiční obor této inverzní funkce?
   d. Využijte náčrtek grafu funkce a určete množinu všech x, pro které je $f(x) \leq 0$.

6. Je dána funkce *g*: $y = 2^{ax+|x|} + b$
   a. Určete reálná čísla $a, b$ ve vzorci funkce g: $y = 2^{ax+|x|} + b$, když $g(1) = 2$ a $g(-1) = -1$.
   b. Uveďte definiční obor funkce, obor hodnot funkce a načrtněte její graf.
   c. Doplňte chybějící souřadnice bodů $G_1[?;0], G_2[?;10]$, které náleží grafu funkce g.

7. Funkce $h$ je určena vzorcem $y = \frac{100^x - 1}{10^x - 1}$.
   a. Zjednodušte funkční předpis a určete definiční obor funkce.
   b. Stanovte obor hodnot funkce a načrtněte její graf.
   c. Dokažte, že pro žádné přirozené číslo x není $h(x)$ násobkem 3.
   d. Jakým vzorcem je určena inverzní funkce k funkci h?
   e. Řešte v množině R rovnici $\frac{100^x - 1}{10^x - 1} = 2.100^x$.

8. Je dána funkce f: $y = 3^{\frac{|x|-x}{2}}$. Načrtněte její graf a určete $D(f), H(f)$. Na kterém intervalu je tato funkce prostá? Určete funkční předpis funkce $f^{-1}$ na tomto intervalu.

9. Řešte v R: $\sqrt{\frac{1}{27}.3^{-x}} = 9^x.\left(\frac{1}{81}\right)^{x-1}$

10. Řešte v R: $6^{2x+1} = 6^x + 22$

## *4. Logaritmická funkce, rovnice a nerovnice*

1. Určete všechna $x \in R$, pro která funkce f: $y = \log_a \dfrac{4}{x-3}$ , kde 0< a < 1 , nabývá nezáporných hodnot.
2. 
   a. Jakou pravdivostní hodnotu mají výroky:
      A: $\log_{0,5} 3 > 0$
      B: $\log_3 0,5 > 0$
      C: $\log_{\frac{1}{3}} 0,5 \langle 0$

   b. Určete definiční obor funkce $y = \log \dfrac{1-x}{1+x}$ a rozhodněte, zda je funkce sudá či lichá

   c. Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\log \dfrac{x}{x+1}}$

3. 
   a. Je zlomek $\dfrac{\log_{0,01} 10 + \log_{10} \sqrt{1000}}{\log_{\sqrt{10}} 10.\log_{100} 0,1}$ zápisem celého čísla

   b. Graf funkce $g$ prochází body $G_1[6;4], G_2[3;0]$. Jakých hodnot nabývají reálná čísla $a$ a $b$ , je-li vzorec, jímž je funkce g určena $y = a \log_2 (x+b)$ ?
      Načrtněte graf funkce g, uveďte, která přímka je asymptotou grafu a kterými body os soustavy souřadnic graf prochází.

   c. Určete definiční obor a obor hodnot funkce h určené vzorcem $y = \sqrt{\log(1-x^2)}$.

4. Řešte rovnici: $\log_9 (3^x - 9) + 1 = x.\log_9 3$
5. 
   a. a)Vypočtěte $\log_{16} V$ , je-li $V = 1 + \log_6 5 + \log_6 7,2 - \dfrac{1}{2}\log_6 3 - \log_6 \sqrt{12}$

   b. Řešte v R rovnice: $\ln x+\ln x^2=\ln^2 x$ a $8+\ln x^2=\ln^2 x$

6. Funkce f je určena vzorcem $y = \dfrac{\log_3 x}{|\log_3 x|}.x^2$ . Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte graf, rozhodněte, zda je funkce prostá, stanovte intervaly monotonosti.

7. Určete číslo a, jestliže $\log_a 96$ je o 4 větší než $\log_a 6$

8. Řešte v R:

9. Řešte v R, výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa: $\log 3^x - 3 = x.\log 9$

10. Řešte v R: $3 - \log 2x = \dfrac{2}{\log 2x}$

## *5. Úprava algebraických výrazů, číselné obory*

1. Zjednodušte výraz $\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}:\left[\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right).\left(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)\right]$ a určete podmínky, za kterých mají provedené úpravy smysl.

2. Upravte: $\left(\frac{a^2+b^2}{a}+b\right):\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}\right]$

3. Upravte: $\dfrac{\frac{a^2+b^2}{b}+2a}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}+\dfrac{2b-\frac{a^2+b^2}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$

4. Dokažte, že pro přípustné hodnoty proměnných platí:
   a. $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}.\frac{a^3-c^3}{a^2b-b^2c}.\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c.(1+c)-a}{b.c}=\frac{1}{a+c}$
   b. $\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right).\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right).\frac{a.b}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{a-b}$

5. Je číslo a) $\sqrt[3]{\sqrt{8\sqrt{8\sqrt{8\ldots}}}}$ , b) $\left(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ\right)^2+\left(\sin 75^\circ-\cos 75^\circ\right)^2$ prvočíslo?
   Jsou čísla $a=2{,}7\bar{2}$ a $b=\sqrt{\log_3{}^2\sqrt{3}-2\log_{0,5}8}$ racionální? Které z nich je větší?

6. Ze vzorce $T=\frac{2\pi.(R+h)}{v}$, kde T je oběžná doba družice o rychlosti v na kruhové dráze ve výšce h, vyjádřete neznámou R. Výsledek zapište ve tvaru zlomku.

7. Určete definiční obor výrazu T a krácením jej zjednodušte:
   $T=\frac{2x^2-162}{(x-2).(x-3)-(x-5).(x+3)}$

8. Stanovte podmínky a vypočtěte: $\left(2-\frac{x^2+16}{4x}\right):\left[\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right).\frac{1}{x}\right]$

9. Zjednodušte výraz: $6a+\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right):\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}$

10. Zjednodušte výraz: $\left[\frac{1}{(x+y)^2}.\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{y}{x^2}$

## 6. Rovnice a nerovnice s parametrem

1. Řešte rovnici $\frac{4}{x-p}+2=\frac{p}{p-x}$ s neznámou $x \in R$ a parametrem $p \in R$

2. Řešte rovnici p-$\frac{1}{p}=\frac{p^2-1}{x}$ s neznámou $x \in R$ a parametrem $p \in R$

3. Řešte rovnici $(5-p).x^2-2.(1-p).x+2.(1-p)=0$ s neznámou $x \in R$ a parametrem $p \in R$

4. Jeden kořen kvadratické rovnice $21x^2+bx-12=0$ je $-\frac{3}{7}$. Určete parametr $b \in R$ a druhý kořen.

5. Určete parametr $m \in R$ tak, aby rovnice $mx^2+2mx=2x-1-m$ měla alespoň jeden reálný kořen.

6. Určete parametr $m \in R$ tak, aby rovnice $(m-2).x^2-(3m+6).x+6m=0$ měla dva různé reálné kořeny.

7. Určete všechny hodnoty reálného parametru a tak, aby kvadratická rovnice $(a^2-1).x^2+2(a-1).x+2=0$ neměla reálné kořeny

8. Jeden z kořenů rovnice $x^2-3bx+2c=0$ je dvojnásobkem druhého. Určete vzájemný vztah mezi reálnými parametry b a c.

9. Řešte nerovnici $(x+3).a-x\rangle 0$ a proveďte diskusi vzhledem k reálnému parametru a.

10. Řešte rovnici $\frac{x-1}{x}=\frac{2-p}{3p}$ s neznámou $x \in R$ a parametrem $p \in R$

## 7. Nerovnice, soustavy rovnic a nerovnic, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

1. Řešte nerovnici:
$$1<\frac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15}<2$$

2. Řešte v R:
$$\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30}>0$$

3. Řešte v R :
$$\begin{aligned} x+2y-3z&=-8\\ -3x+y+2z&=10\\ 2x-3y+2z&=5 \end{aligned}$$

4. Řešte v R nerovnici:
$$\frac{x^2-8x+15}{x^2-5x+4}\leq 0$$

5. Řešte v R: $3|x-1|+2|x-2|=|x+10|$

6. Řešte v R: $10|x-1|-6|2-x|+2|x-4|>10-2x$

7. Řešte soustavu rovnic s reálnými neznámými:
   2x+y=7
   $|x-y|=2$

8. Řešte soustavu rovnic s reálnými neznámými:
   $x+y=\frac{3}{8}.x.y$
   $x-y=\frac{1}{8}.x.y$

9. Zjistěte, zda nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel x a y je větší než 100, když jejich poměr je 9:4 a jejich aritmetický průměr je o jedničku větší než jejich průměr geometrický.

10. Řešte v R: $\frac{|x|^2-3|x|-28}{|x|-7}\rangle 9$

**8. Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice**

1. $\frac{\sin^2 x}{tgx}+\cos^2 x.tgx=\frac{1}{2}$

2. sin3x = 2sinx

3. $\frac{\sin^2 2x-4\sin^4 x}{\cos 2x}=1$

4. Sestrojte graf funkce $|\, y=\left|2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$

5. Dokažte, že platí rovnost : $\frac{tgx+\sin x}{tgx-\sin x}=\cot g^2\frac{x}{2}$

6. Je dán vzorec $y=a\sin x+b, a\rangle 0$.
   a) Pro které hodnoty reálných parametrů $a$ a $b$ určuje vzorec funkci $g$ s definičním oborem $D(g)=\langle 0;2\pi\rangle$, jejíž graf prochází bodem T$\left[\frac{\pi}{6};4\right]$ a v bodě $x_0$, což je její minimum, je $g(x_0)$=-2?
   b) Uveďte množinu $H(g)$.
   c) Najděte všechny dvojice $[?;0]\in g$.
   d) Načrtněte graf funkce g.

7. Vzorcem $y=\frac{\sin 2x+|\sin x|}{2\sin x}$ je určena funkce k.
   a) Do množiny $D(k)$ zahrňte všechna x z intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$, pro která je definována.
   Stanovte i obor hodnot funkce k a zobrazte její graf.
   b) V kterých bodech protíná graf funkce k osu x?
   c) Má funkce k v některém bodě svého definičního oboru maximum nebo minimum?

8. a) Porovnejte definiční obor, obor hodnot a grafy funkcí $r: y=\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2$ a

$$s: y=\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$$

9. V množině $J=\langle 0;2\pi\rangle$ řešte rovnici: $\frac{1}{\cos x}=tgx+2\cos x$

10. V množině $J=\langle 0;2\pi\rangle$ řešte rovnici: $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}+tgx=0$

## *9. Funkce absolutní hodnota, kvadratická funkce, lineárně lomená funkce*

1. Sestrojte graf funkce: $y = |-x^2 - 2|x| + 3|$
2. Načrtněte graf funkce $y = x^2 - x\,|x-2|-4$
3. Sestrojte graf funkce $y=\left|\frac{2x+3}{x-2}\right|$
4. Vypočtěte užitím diferenciálního počtu rovnice asymptot a souřadnice středu hyperboly, která je grafem funkce f:

$$y = \frac{8x-14}{2x-3}$$

. Potom určete intervaly monotónnosti této funkce a určete body grafu funkce f, ve kterých má tečna grafu směrnici rovnu 1.

5. Sestrojte graf funkce: $y = |2-x| + |2x-7| + 3|1+x| - 15$
6. Sestrojte graf funkce: $y = |1-x| - 2|x| + |2-x|$
7. Funkce f je určena vzorcem $y=-\left(\frac{1-\frac{x}{x+2}}{1+\frac{x}{x+2}}\right)^{-2}$.
   a) Tuto funkci je možné zadat výrazně jednodušším vzorcem. Najděte jej,stanovte definiční obor a obor hodnot této funkce.
   b) Načrtněte graf funkce f.
   c) Zapište její intervaly monotonosti.
   d) Existuje k funkci f funkce inverzní? Pokud ano, stanovte vzorec, jímž je funkce určena. Pokud ne, zdůvodněte.
   e) Přesvědčte se výpočtem, že přímka p: $2x+y+1=0$ je tečnou grafu funkce f. V kterém bodě? V114
8. Určete definiční obor funkce: $y=\sqrt{5-|1-x|-|2+2x|}$
9. Určete funkční předpis kvadratické funkce, sestrojte její graf a určete její vlastnosti, jestliže platí: $f(0)=-3, f(-1)=-6, f(2)=15$
10. Graf kvadratické funkce obsahuje body $[2;0],[4;0],[0;16]$. Vypočtěte funkční hodnotu $f(-1)$

## *10. Komplexní čísla ,binomická rovnice*

1. $x^6 - 64 = 0$
2. $x^6 = -729i$
3. Vypočtěte: $(1-i)^7$

4. Řešte v množině komplexních čísel a řešení znázorněte graficky:
$|z+1-2i| \leq 3 \wedge |z+2-2i| > |z|$
5. Řešte v C :
$$\left(5-\frac{1}{i}\right).\,\bar{z}+2z=22i$$

6. Řešte v C:

$$\sqrt[3]{z^4}-3.\sqrt[5]{z^2}=54$$

7. Vyjádřete v algebraickém i goniometrickém tvaru všechna komplexní čísla z=a+ib, pro která platí: $|z|=2$, $a=\sqrt{3}.b$
8. Komplexní číslo $z=\frac{15-5i}{1+2i}-\frac{1-3i}{i}+3i-1$ vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část komplexního čísla $z^{66}$.
9. Řešte rovnici $z^2-4iz-3=0$ s neznámou $z \in C$
10. Napište kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jestliže jeden kořen této rovnice je $x_1=1-i$. Oba kořeny této rovnice vyjádřete v goniometrickém tvaru.

## *11. Obvody a obsahy geometrických obrazců*

1. Kosočtverec je dán svým obsahem $S=150cm^2$ a poměrem úhlopříček e: f = 3 : 4 . Určete v, a, e, f.
2. Základna rovnoramenného trojúhelníka je 20 cm, obsah je $240cm^2$. Vypočtěte obvod tohoto trojúhelníka.
3. Do kružnice o poloměru r = 19 mm je vepsán pravidelný šestiúhelník. Vypočtěte obsah kruhové úseče, ohraničené stranou šestiúhelníku a kružnice.
4. Obdélníkový obraz s rozměry 40cm a 60cm má být zarámován rámem konstantní šířky. Obsah plochy rámu má být stejný jako obsah obrazu. Určete šířku rámu.
5. Určete obsah pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru r=3cm
6. Obvody dvou soustředných kružnic měří $o_1=20\pi, o_2=16\pi$ cm. Vypočítejte obsah mezikruží určeného danými kružnicemi.
7. V obdélníku ABCD je $|BC|=6cm, |CF|=8{,}2cm, |DF|=4{,}1cm.$ Bod F je středem úsečky CD. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABE, je-li bod E průsečíkem polopřímek $\mapsto AD$ a $\mapsto BF$.
8. V lichoběžníku ABCD je vzdálenost průsečíku úhlopříček od základny AB rovna 3 cm, délka této základny je 8 cm. Vypočítejte délku druhé základny CD, jestliže obsah lichoběžníku je $27cm^2$.
9. Je dán lichoběžník ABCD se základnami $|AB|=6cm, |CD|=3cm$ a průsečíkem úhlopříček S. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABS, jestliže obsah trojúhelníku CDS je 13cm.
10. Výška a obě základny lichoběžníku jsou v poměru v:c:a=2:3:5. Obsah lichoběžníku je $S=512cm^2$. Určete délky obou základen lichoběžníku.

## *12. n-úhelníky a jejich konstrukce*

1. Je dána úsečka AB, |AB| = 5 cm. Sestrojte všechny tětivové čtyřúhelníky ABCD, v nichž je |AC| = e = 8 cm, β = 120˚ a ε = 105˚, je-li ε velikost úhlu AEB, kde E je průsečík úhlopříček.
2. Sestrojte čtyřúhelník ABCD, pro který platí, že je tečnový , a = 7,5 cm; b = 3,5cm; α = 45˚ a ρ= 2cm.
3. Sestrojte Δ ABC,je-li : |AB| = 5cm

$\gamma = \pi/4$
$v_c = 3{,}5cm$

4. Sestrojte $\Delta$ ABC,víte-li , že : $a + b = 9cm$
$c = 5{,}7cm$
$\gamma = 75^\circ$
5. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník ABCD, jehož úhlopříčky jsou navzájem kolmé a ve kterém je dáno: $\alpha = 60^\circ$, $|AB| = 7cm$, AB je rovnoběžná s CD
6. Sestrojte lichoběžník ABCD, je-li dáno: a=10cm, c=5cm, $|AC| = e = 6cm, |BD| = f = 12cm.$
7. Sestrojte kosodélník ABCD, je-li dáno: a=7cm, b=4,5cm, $v_a$ =4cm.
8. Je dána úsečka $BS_1, |BS_1| = 6cm.$ Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka $BS_1$ těžnicí $t_b$ a pro které dále platí: $\alpha = 45^\circ, b = 5cm.$
9. Je dána úsečka $AB, |AB| = 6cm.$ Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka AB stranou c , $v_c. = 2cm, r = 4cm$.
10. Sestrojte kosočtverec ABCD, znáte-li a = 4cm, v = 3cm.

## *13. Pravděpodobnost a statistika*

1. Určete pravděpodobnost, že při hodu dvěma hracími kostkami, žlutou a červenou,
   a) bude součet bodů na obou kostkách 6
   b) bude součet bodů na obou kostkách menší než 5
   c) padne na obou kostkách dvojka
   d) padnou na obou kostkách stejná čísla
   e) padne na žluté kostce číslo menší než 3 a na červené číslo větší než 1
   f) padnou na obou kostkách sudá čísla
   g) alespoň na jedné kostce padne liché číslo
2. Z číslic 1,2,3,4 vytvoříme všechna trojciferná přirozená čísla, v jejichž dekadickém zápisu se každá z těchto číslic vyskytuje nejvýše jednou. Určete pravděpodobnost, že z nich namátkou vybrané číslo je:
   a) dělitelné 4
   b) dělitelné 3
   c) dělitelné 3 a zároveň 4
   d) dělitelné 3 nebo 4
3. Máme bílou a černou kostku. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu černou kostkou padne větší číslo, než při hodu bílou kostkou?

4. Následující čísla jsou počty otelení u 50 krav:
1,4,7,2,5,3,1,5,4,2,6,3,1,6,5,4,7,2,8,9,3,8,1,7,5,6,1,8,9,3,10,5,2,11,4,12,3,4,10,3,8,2,4,3,6,2,7,1,6,9.
   a) sestavte tabulku rozdělení četností podle počtu otelení a znázorněte je spojnicovým diagramem
   b) určete aritmetický průměr, modus a medián
   c) určete směrodatnou odchylku
5. 15 studentů maturitního ročníku bylo vyzváno, aby uvedli svoji tělesnou výšku ( znak x) a tělesnou výšku otce ( znak y). Byly zjištěny tyto hodnoty:
výška syna 172 168 183 182 174 166 173 170 180 171 165 171 179 189 177
výška otce 175 170 185 176 168 167 171 176 176 166 169 177 184 185 173
Vypočtěte koeficient korelace mezi tělesnou výškou otce a syna.
6 Číslo n je z naměřených hodnot 3,n,5,11,7,8,10,11,11 největší. Určete hodnotu n, jestliže víte, že medián tohoto souboru je roven aritmetickému průměru.
7.Geometrický průměr čtyř kladných čísel 4,16,x,x je 2. Vypočítejte jejich harmonický průměr.
8.Klíčivost semen dané rostliny je 0,98. Pro pokusné účely bylo zasazeno 10 semen. Určete pravděpodobnost, že z těchto semen
   a. vyklíčí právě 8

b. nevyklíčí ani jedno

9. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se čtyřmi dětmi jsou dva chlapci a dvě dívky, jestliže víme, že mezi dětmi je alespoň jedna dcera?
10. Na tiketu se tipuje 5 čísel z 35 možných. Tiket nic nevyhrává, pokud obsahuje méně než 3 z 5 vylosovaných čísel. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vyplněný tiket něco vyhraje?

## 14. Posloupnost geometrická, nekonečná geometrická řada

1. Určete geometrickou posloupnost, víte-li, že $a_1 + a_2 + a_3 = 35$
$a_4 + a_5 + a_6 = 280$

2. Přičteme-li k číslům 2 , 7 a 17 totéž číslo , vzniknou první tři členy geometrické posloupnosti.Určete je.
3. Řešte v R: $\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \dots$

4. Určete $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right)$

, 5. a) Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je určena rekurentním vzorcem
$b_{n+1} = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$; $b_1 = 1$
Zapište několik jejích prvních členů a zjistěte, zda součet prvních 13 členů je větší než 7!?

b) Vypočtěte $\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{4 . \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}}$.

6. Pro které reálné číslo x je součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log_8 x)^n}{(-1)^{n+1}}$ roven 0,25?

7. Ve které geometrické posloupnosti platí $\frac{a_5 + a_7}{a_6} = 2{,}5$ a $a_4 = 2{,}5$

8. Rodiče studenta uložili k 1.1. občanského roku na synovo konto částku 800 000 Kč, roční úroková míra je 2,8%, úrokovací období je jeden rok. Úroky za jeden rok z této částky mají synovi nahradit náklady na celoroční ubytování v pronajatém pokoji. Daň z úroku je 15%, na kontě v průběhu roku nebude zaznamenán žádný pohyb. Určete maximální měsíční nájem zaokrouhlený na stovky, který tak lze získaným úrokem uhradit.
9. Jakou nejmenší částku zaokrouhlenou na stovky je třeba vložit v bankovním domě k 1.1. občanského roku na účet, aby tak při roční úrokové míře 2,2% s ročním úrokovacím obdobím uhradil za jeden rok získaný úrok náklady na roční nájemné za byt ( měsíční nájemné je 3776Kč).Daň z úroku je 15%, na účtu nebude v průběhu roku zaznamenán žádný pohyb.
10. Existuje $x \in R$, pro něž je součet řady $(x+3) + (x+3)^2 + (x+3)^3 + \dots$ roven $-\frac{7}{8}$ ?

## 15. Posloupnosti, aritmetická posloupnost

1. Ve které aritmetické posloupnosti platí: $S_5 = S_6 = 60$ ?
2. Číslo 55 rozložte na součet několika čísel tak, aby každé následující bylo o 4 větší než předcházející a poslední bylo 19.
3. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna má délku 24 cm. Určete délky zbývajících stran.

4. a)Pan M se rozhodl, že v sázkové kanceláři bude sázet tak dlouho, dokud nevyhraje. Jeho

sázka pro první tah byla 10 Kč, každá další pak o 5 Kč vyšší. V 30. tahu konečně poprvé vyhrál, a to částku, která byla 38krát větší než ta, kterou vsadil pro 12. tah. Dál pan M. už nesázel. Má důvod k radosti? Jaký zisk mu přinesl popsaný způsob sázení?

b)Pan P uplatnil úplně stejný způsob sázení jako jeho kolega M. Dal si do obálky tři tisícikoruny a postupně z ní čerpal peníze na jednotlivé sázky. Bohužel v žádném tahu nevyhrál ani korunu. Když v obálce zbyly poslední tři desetikorunové mince, rozhodl se, že dál nebude štěstí pokoušet. Na kolik sázek mu částka, deponovaná v obálce, vystačila? Vsadil si vícekrát, než jeho kolega?

5. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je určena vzorcem $a_n = \dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n}$.

   a) Určete její 22. člen.
   b) Pokuste se najít jednodušší vzorec, kterým je posloupnost určena, rozhodněte také, zda je konvergentní

6. Zapište vzorcem pro n-tý člen:
   a) posloupnost všech přirozených sudých čísel
   b) posloupnost všech přirozených lichých čísel
   c) posloupnost všech přirozených čísel dělitelných 11
   d) posloupnost všech přirozených čísel, která při dělení 5 dávají zbytek 1

7.Rozhodněte, zda rostou nebo klesají následující posloupnosti:

a) $\left\{-n^2+4n-4\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\left\{\dfrac{n+1}{2n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$

8. Určete reálné číslo x tak, aby čísla $a_1, a_2, a_3$ tvořila tři následující členy aritmetické

$a_1 = x^2 + x$

posloupnosti: $a_2 = x^2 + 4x + 4$

$a_3 = 16$

9. Určete součet všech přirozených čísel, která vyhovují rovnici:

$\left(12x+\dfrac{2}{3}\right).5-\dfrac{5x-15}{3}\langle 50.(x+10)$

10. Nekonečná spirála se skládá z polokružnic, poloměr první polokružnice je 6cm, poloměr každé další je o $\dfrac{1}{3}$ menší než poloměr kružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.

## *16. Vektorová algebra, analytické vyjádření přímky a roviny*

1. Jsou dány body A[2;0],B[3;-2] a C[4;1].Dokažte,že tyto tři body tvoří trojúhelník.Vypočtěte velikost jeho vnitřních úhlů, velikost těžnice $t_a$. Jak daleko je těžiště T od vrcholu A?
2. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV, velikost jeho podstavné hrany a = 6cm a výška jehlanu v = $3\sqrt{2}$ . Zvolte vhodně v prostoru k.s.s. a
   a) vypočtěte velikost boční hrany jehlanu
   b) dokažte, že platí AV $\perp$ CV
   c) určete velikost úhlu vektorů AV a BC
3. Jsou dány body: A[ 2; 0; 3]; B[ 2; 2; –7] a C[ 3; –1; –2]. Rovina ρ má rovnici ρ: 3x + y – 2z –5 = 0.
   a) veďte bodem A přímku p $\parallel$ BC
   b) ukažte, že přímka p je různoběžná s rovinou ρ a najděte jejich průsečík.

x – 1 y + 2

4. Je dán bod A[ –1;2;1] a přímka p : $\dfrac{\quad}{2} = \dfrac{\quad}{3} = z$
   a) Napište obecnou rovnici roviny ρ, určené bodem A a přímkou p
   b) Určete pravoúhlý průmět M´ bodu M[1; 0; 1 ] do roviny ρ.
5. Vektory $a$ a $b$ jsou rovnoběžné, přitom $a = (16;-15;12), |b| = 75$. Jaké souřadnice má vektor $b$?
6. Je dán trojúhelník ABC, $A[-1;4], B[2;-2], C[5;-1]$. Vypočtěte:
   a) vnitřní úhel $\beta$
   b) odchylku osy úsečky AB a osy x
   c) velikost úhlu ATB, kde T je těžiště trojúhelníku ABC
7. Vypočítejte obvod, vnitřní úhly a obsah trojúhelníku RST, jsou-li souřadnice vrcholů $R[4;1;0], S[4;-2;-3], T[1;-2;0]$.
8. Jsou dány body $A[-2;4], C[8;5]$. Určete souřadnice bodů B,D tak, aby trojúhelník ABCD byl čtverec.
9. Vektor $z(2;-2;-10)$ zapište jako lineární kombinaci vektorů u,v a w, kde $u(2;1;-1), v(2;3;2), w(4;5;-2)$.
10. Je dán vektor $r(3;2)$. Určete $q \in R$ tak, aby pro vektor $s(q;-2)$ platilo $|3r + s = 5|$.

## *17. Základní polohové a metrické vlastnosti v rovině a prostoru*

1. Určete vzdálenost d ( Q ; p ), víte-li, že Q =[ 7; 1; 9]
   p: P =[ 1; 3; –1] , ū = ( 4; 1 ; 3 )
2. Je dána rovina ρ : 2x + 3y – z – 6 = 0 a přímka p: x = 1 – t
   y = 2 + 2t
   z = 4 + 3t t patří do R
   a) Určete vzájemnou polohu přímky a roviny, v případě různoběžnosti určete také průsečík.
   b) Napište rovnici přímky q, která je pravoúhlým průmětem přímky p do rovinyρ.
3. Který bod přímky 5x-4y-28=0 má tu vlastnost, že jeho vzdálenost od bodu M$[1;5]$ je Stejná jako vzdálenost od bodu N$[7;-3]$?
4. Určete vzájemnou polohu přímek p: 3x-y-1=0
   q: 2x-y+3=0
   r: x-y+7=0
5. Je dána přímka p: x=3+2t, y=-5-t, z=1-2t, t$\in$R, rovina $\rho$ : 3x-4y+9=0 a rovina $\sigma$ **:** 5x-y-7z+11=0. Určete:
   a) odchylku přímky p a roviny $\rho$
   b) přímky p od roviny $\sigma$
   c) odchylku rovin $\rho$ a $\sigma$.
6. Určete reálné číslo d, pro které mají roviny $\alpha, \beta, \gamma$ společnou přímku. Jaké je parametrické vyjádření této přímky?
   $\alpha = x + y + 4 = 0$
   $\beta = x - 2y + z + 2 = 0$
   $\gamma = x + 4y - z + d = 0$
7. Napište rovnici příčky mimoběžek p,q, která leží v rovině
   $\delta : x + y + z - 6 = 0$
   p: $x = -2 + t; y = 4 - 2t, z = 2 + 2t, t \in R$
   q: $x = 1 + r; y = 1 + r; z = 1 + r; r \in R$
8. Určete hodnoty parametrů $a, b \in R$ tak, aby přímka

$p = \{[a - t; 1 + bt; 2 - 2t] t \in R\}$ byla s rovinou $\rho = x + 2y - z - 10 = 0$

a) různoběžná
b) ležela v rovině
c) rovnoběžná a neležela v rovině $\rho$

9. Kolmicemi, sestrojenými z bodu $A[-2;1;8]$ na roviny $\rho = 3x + y - 2z - 4 = 0$ a $\sigma' : x + 2y - z + 5 = 0$ proloýte rovinu $\tau$. Určete její obecnou rovnici.
10. Je dán bod $A[-1;4;-2]$. Na ose y určete bod Y tak, aby platilo $|AY| = 3$.

## *18. Shodná zobrazení*

1. Jsou dány kružnice $k_1$, $k_2$ a přímka p. Sestrojte všechny rovnostranné $\Delta$ ABC, jejichž těžnice je částí přímky p a vrcholy AB leží postupně na $k_1$ a $k_2$.

2. Je dán bod A, přímka p a kružnice k. Sestrojte všechny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou BC, pro které platí, že B leží na k a C leží na p.
3. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li: a+b+c=12cm, $\alpha = 45^\circ, \beta = 75^\circ$.
4. Na kulečníkovém stole leží dvě koule, červená a bílá. Červená leží ve středu stolu, bílá v jedné čtvrtině úhlopříčky stolu.(Kouli považujte za bod).
   a) určete dráhu červené koule tak, aby se po jednom odrazu od některé stěny stolu srazila s bílou koulí
   b) určete dráhu červené koule tak, aby se po odrazu od dvou sousedních stěn stolu srazila s bílou koulí
5. Je dána úsečka OP, $|OP| = 4cm$. Sestrojte kružnici $k(O;2{,}5cm)$ a přímku p, která je kolmá na OP $\wedge P \in p$. Dále sestrojte jeden bod M, pro který platí: $|OM| = 3cm, |\sphericalangle POM| = 30^\circ$.
6. Kružnice $k_1(O_1;5cm), k_2(O_2;3cm), |O_1O_2| = 4cm$ se protínají ve dvou bodech. Označte C jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB tak, aby platilo: $A \in k_1 \wedge B \in k_2 \wedge |\sphericalangle ACB| = 120^\circ$.
7. Je dána úsečka $CS_1, |CS_1| = 3cm$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka $CS_1$ těžnicí a platí: a=3,5cm, b=5cm.
8. Sestrojte trojúhelník ABC, víte-li, že b+c=10, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
9. Je dán obdélník ABCD, $|AB| = 6cm, |BC| = 4cm$ a uvnitř obdélníku dva body K,L tak, že platí: $|AK| = 6cm, |BK| = 3{,}5cm, |AL| = 2cm, |BL| = 4{,}5cm.$ Na úsečce AB najděte bod X tak, aby součet vzdáleností $|KX| + |LX|$ byl minimální.
10. Jsou dány dvě různoběžky p,q a bod M, který neleží ani na jedné z nich. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo: $X \in p, Y \in q$ a bod M je střed úsečky XY.

## *19. Podobná zobrazení, množiny všech bodů dané vlastnosti*

1. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a,b a přímky c , která rovnoběžky protíná. Sestrojte kružnice, které se dotýkají všech daných přímek.
2. Umístěte úsečku $BB_1$, $|BB_1| = 6$cm a sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC, je-li dáno $t_c, |\sphericalangle BCA| = \pi/2$ a víte-li, že $B_1$ je střed AC. Jaké podmínky musí splňovat $t_c$, aby množina trojúhelníků uvedených vlastností byla neprázdná?
3. Jsou dány dvě různoběžky p,q a uvnitř jednoho jejich úhlu bod M. Sestrojte kružnici k, která prochází bodem M a dotýká se přímek p,q .
4. Sestrojte $\Delta$ ABC, je-li dáno: $v_a = 5$cm, a:b:c = 2:3:4

5. Vnitřní úhly trojúhelniku ABC jsou $\alpha = 75^\circ, \beta = 50^\circ$. Střed S strany a má od strany c vzdálenost d=2,8cm. Sestrojte tento trojúhelník.
6. Sestrojte množinu všech bodů, ze kterých je úsečka AB o velikosti 5cm vidět pod úhlem $80^\circ$.
7. Sestrojte množinu všech bodů, ze kterých je úsečka AB o velikosti 5cm vidět pod úhlem $120^\circ$.
8. Je dána $k_1(S_1;3cm) a k_2(S_2;5cm)$. $|S_1S_2| = 9cm$. Sestrojte středy stejnolehlosti $k_1$ a $k_2$.

9. Sestrojte trojúhelník ABC $(a = 6cm, b = 7cm, c = 8cm)$. Narýsujte těžiště T trojúhelníku ABC. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $\chi = -\frac{1}{2}$.
10. Do trojúhelníku ABC $(a = 5cm, b = 6cm, c = 7cm)$ vepište čtverec KLMN tak, aby platilo: $KL \subset AB \wedge M \in BC \wedge N \in AC$.

## *20. Řešení pravoúhlého trojúhelníku, trigonometrie*

1. Ze dvou míst A,B, vzdálených na horizontální rovině od sebe 3 113 m bylo pozorováno čelo mraku nad spojnicí obou míst ve výškových úhlech α = 78˚ 40´ a β = 63˚ 50´. Jak vysoko byl mrak?
2. Při stavbě primárního vedení lesem se má provést přímý průsek mezi body A,B, ležícími na krajích lesa. Mimo les bylo zvoleno stanoviště C, z něhož jsou oba konce plánovaného průseku vidět, a to pod úhlem γ = 75˚ 7´ 30˝. Vzdálenost mezi místy A a C je 361 metrů, mezi místy B a C 324 metrů. Jak bude průsek dlouhý?
3. Kolmice p vedená středem přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC s vnitřním úhlem $\alpha = 39{,}8^\circ$ a odvěsnou b=12cm rozděluje trojúhelník na dvě části.
   a) Budeme-li obsah trojúhelníku pokládat za 100%, je možné, že se obsahy těchto částí liší méně jak 10%?
   b) Má ta část, která má větší obsah, i větší obvod?
4. Součástí rekonstrukce lázeňského parku je i výměna krytiny čínského pavilonu. Jak je uvedeno v neúplné dokumentaci, ta má tvar kulového vrchlíku, kružnicovému oblouku středový úhel $\varphi = 46^\circ$, vzdálenost krajních bodů oblouku je 32 metrů. Za částku, která je v plánu uvedena jako náklady na nákup měděného materiálu, by se v současné době dalo nakoupit 900m$^2$ plechu. Obsah vrchlíku je 95% materiálu, který je třeba na rekonstrukci střechy. Podle projektanta by 900m$^2$ mělo stačit, pokrývač však tvrdí, že je to málo. Je jeho námitka oprávněná?
5. Z okna ve 2.patře domu je vidět na druhém břehu kamenný sloupek, ke kterému převozník přivazuje pramici, v hloubkovém úhlu $\varepsilon = 9^\circ$, z okna 3. patra, tj. výš o tři metry, v hloubkovém úhlu $\delta = 11^\circ$. Jak je řeka v tomto místě široká?
6. Přepona pravoúhlého trojúhelníku má délku 61cm, součet velikostí odvěsen je 71cm. Zjistěte velikosti jeho vnitřních úhlů.
7. Jedna z odvěsen pravoúhlého trojúhelníku má velikost 10cm, poloměr jemu vepsané kružnice je $\rho = 2$cm. Vypočtěte obsah trojúhelníku. (Výpočty zaokrouhlujte na jedno desetinné místo).
8. V trojúhelníku ABC je a=20cm, b=16cm, $\gamma = 75^\circ$. S přesností na dvě desetinná místa určete délku $t_c$.
9. Určete poloměr kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku, má-li úhel proti základně velikost $128^\circ$ a výška na základnu má délku 20 cm.
10. Z bodu A, který leží vně kružnice $k(S;10cm)$, jsou vedeny tečny ke kružnici k s body dotyku $T_1$ a $T_2$. $|\angle T_1AT_2| = 60^\circ$. Obdobně z bodu B $(B \in \mapsto SA)$ jsou ke k vedeny tečny, tentokrát s body dotyku $T_3$ a $T_4$. $|\angle T_3BT_4| = 20^\circ$. Určete velikost úsečky AB.

## 21. Řezy těles, objemy a povrchy těles

1. Objem pravidelného šestibokého hranolu V=540 $\sqrt{3}$ .Délka podstavné hrany a je k délce výšky v hranolu v poměru 3:5. Určete povrch hranolu.
2. Do koule o poloměru r je vyvrtán otvor tvaru rovnostranného válce.V jakém poměru jsou objemy koule a válce?
3. Kolik $m^3$ zeminy je třeba přemístit při výkopu přímého, 170 metrů dlouhého vodního příkopu, jehož průřez má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 150 cm a 80 cm a ramenem délky 90 cm?
4. Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte krychli ABCDEFGH o hraně 4 cm v pravém nadhledu. Potom sestrojte řez rovinou ρ= XYZ, je-li X středem AD
   Y středem BF
   Z bodem HG; |HZ| : | ZG | = 1 : 3
5. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu rovinou ρ= PQR, je-li P střed AV
   Q náleží BV ; | BQ | : | QV | = 1 : 5
   R náleží CV ; |CR | : |RV | = 1 : 3
6. V rovině $\alpha$ je umístěn kruh o poloměru r, který je společnou podstavou polokoule a kužele. Ty leží v témže poloprostoru, jehož hranicí je rovina $\alpha$ . Výška kužele je 3r.
   a) Celými čísly vyjádřete poměr objemů kužele a polokoule.
   b) Porovnejte délku kružnice, která je průnikem plášťů polokoule a kužele, a obvod společné podstavy obou těles. Řešte pro r=4.
7. Zobrazte řez krychle ABCDEFGH rovinou $\delta$ určenou body K,L a S. K je střed hrany FG, L je střed hrany EF a S střed stěny ABCD.
   - Velikost hrany krychle je a, a $\rangle$ 0. Pomocí parametru a vyjádřete obsah řezu.
   - Najděte nejmenší přirozené číslo a, pro které je obsah řezu celé číslo
   - Jsou přímka BF a rovina řezu rovnoběžné? Pokud ne, sestrojte jejich společný bod. V44
8. Všechny hrany pravidelného trojbokého hranolu ABCDEF jsou stejně dlouhé, K je střed stěny CBEF.
   a) Zobrazte těleso ve volném rovnoběžném promítání
   b) Určete průsečík přímky AK a roviny horní podstavy hranolu
   c) Jak velká je odchylka přímky AK a roviny DEF?
   d) Je-li každá hrana tohoto hranolu velikosti $\sqrt{3}$ cm, je jeho objem v cm dán celým číslem?

9. Poměr obsahu pláště rotačního válce k obsahu podstavy je 7:6. Úhlopříčka osového řezu válce má délku 50cm. Určete objem tohoto tělesa ( výsledek zapište jako násobek čísla $\pi$ ).

10. Pláštěm rotačního kužele je půlkruh o poloměru m= $6\sqrt{3}$ cm. Určete objem tohoto tělesa.

## 22. Kombinatorika, binomická věta

1. Určete všechna reálná čísla x tak,aby čtvrtý člen binomického rozvoje daného výrazu byl roven 200
   $$\left(\frac{1}{x^{2(1+\log x)}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$$

2. V binomickém rozvoji výrazu
   $$\left(\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{15}$$
   zjistěte: a) třináctý člen rozvoje
   b) člen rozvoje, neobsahující x

3. Řešte rovnici:

   log(x+6)!-log(x+5)!=2logx

4. Řešte rovnici: $\binom{4}{1}\binom{x+1}{x-1}+\binom{6}{4}=\binom{x+1}{x}\binom{5}{2}-\binom{3}{2}$

5. Kolik čtyřciferných čísel lze vytvořit z číslic 0,1,2,3,4,5 tak, aby se žádná z cifer neopakovala?
   – kolik z nich bude sudých
   – kolik jich bude dělitelných pěti
   – kolik jich bude dělitelných deseti
   - kolik jich bude větších než 3000 ?

6. Určete všechna přirozená čísla x, pro která platí: $\frac{(x+3)!}{(x+1)!}=\frac{(x+2)!}{6.(x-1)!}+20$

7. Jestliže zvětšíme počet prvků množiny o dva, zvětší se počet variací třetí třídy o 384. Kolik Prvků má množina?

8. Kolik přímek je určeno 10 různými body, jestliže
   a) žádné 3 z nich neleží na jedné přímce
   b) čtyři z nich leží na jedné přímce

9. Ve třídě je 19 chlapců a 16 dívek. Kolika způsoby je možné vybrat do soutěže 4 studenty tak, aby ve vybrané skupině byli:
   c) pouze chlapci
   d) jedna dívka a tři chlapci
   e) dvě dívky a dva chlapci

10. Kolik je přirozených čísel menších než $10^4$, jejichž cifry jsou navzájem různé_

## 23. Neurčitý a určitý integrál

1. Vypočtěte:

a) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

b) $\int \cos^2 x \, dx$

c) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$

d) $\int \left(2 + \frac{3}{x}\right)^2 dx$

2. Vypočtěte:

a) $\int x \cdot e^{3x} dx$

b) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

c) $\int \frac{3x}{(x^2 + 4)^3} dx$

d) $\int \frac{3 \ln x}{x} dx$

3. Vypočtěte obsah obrazce, ohraničeného křivkami:

$y = x^2 - 4x + 2$

$y = -x^2 + 6x - 6$

4. Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce, ohraničeného křivkami:
$x^2 + y^2 - 2x = 0$ a $y = x$ kolem osy x.

5. Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

6. Určete reálné číslo c tak, aby $\int_2^3 (x^2 + 4x - c) dx = 0$

7. Vypočítejte obsah parabolické úseče, jejíž hranici tvoří grafy funkcí f: $y = \sqrt{x}$ a
$g: y = -\frac{1}{8}x + 0{,}75$

8. Vypočtěte: a) $\int_1^4 (\sqrt{x} + x\sqrt{2}) dx$

b) $\int_0^{2\pi} (x - 2\sin x) dx$

9. Hranici kruhové výseče tvoří oblouk kružnice určené rovnicí $x^2 + y^2 = 100 (x \geq 0)$ a dvě úsečky, jejichž společný krajní bod je počátek, druhé jejich krajní body jsou průsečíky přímek 3x-4y=0 a 3x+4y=0 s tímto kružnicovým obloukem. Určete objem tělesa, které vznikne rotací kruhové výseče kolem osy x.

10. Vypočítejte obsah hyperbolické úseče, jejíž hranici tvoří grafy funkcí
$f: y = x^{-1}$
$g: y = -\frac{1}{8}x + 0{,}75$

## *24. Limita funkce, derivace funkce a její užití*

1. Vyšetřete průběh funkce: $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

2. Vyšetřete průběh funkce : $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

3.Vypočtěte následující limity: a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x-1}$

b) $\lim_{x \to \pi} \dfrac{tgx - \sin x}{(\cos x)^3}$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x + tg^2 x}{x \sin x}$

d) $\lim_{x \to \infty} \left( \dfrac{x^3}{2x^2 - 1} - \dfrac{x^2}{2x+1} \right)$

e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

4.Vypočtěte následující limity: a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^3 - 5x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$

c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$

d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$

e) $\lim_{x \to 0} \left( \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{tgx} \right)$

5. Určete první derivace složených funkcí:

a) $y = \sqrt{(x^2 - 3x + 1)^3}$

b) $y = (x^2 - 1)^3 \cdot (x^3 + 2)^2$

c) $y = \dfrac{(x^2 - x + 1)^2}{\phantom{x}}$

$\sqrt{2x+1}$

d) $y = \log(x^2 + 1)$

6. Určete první derivaci složených funkcí

a) $y = \sqrt{x^2-1}.(2x^2+1)$

b) $y = \dfrac{e^x \,.\, e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

c) $y = \sqrt{\sin x} + \sin\sqrt{x}$

d) $y = (x^2 + 2)^3 \,.\, \cos^2 x$

7.Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f: $y = 2x - \ln x$ v jeho bodě T [ 1 ?].

8. Na konzervu tvaru válce se má spotřebovat $5\,dm^2$ bílého potravinářského plechu. Jaké má mít konzerva rozměry, aby měla maximální objem?

9. Najděte obdélník, který má při daném obvodu o = 10 cm maximální obsah.

10. Nádrž na vodu má mít čtvercové dno, objem $256\ m^3$ a tvar kvádru. Vypočítejte rozměry nádrže tak, aby spotřeba materiálu na vyzdění stěn a dna byla co nejmenší.

## *25. Kuželosečky*

1. Je dána hyperbola $x^2 - 9y^2 = 1$ a bod M [3; 1].
   a) Určete velikosti poloos hyperboly.
   b) Zjistěte polohu bodu M vzhledem k hyperbole.
   c) Napište rovnice všech přímek, které procházejí bodem M a mají s hyperbolou právě jeden společný bod.
2. Rozhodněte, zda je daná rovnice analytickým vyjádřením hyperboly. Pokud ano, najděte její střed, velikosti poloos.
   $$x^2 - 4y^2 + 6x + 32y - 155 = 0$$
3. Parabola $(x-3)^2 = 2p \,.\, (y+2)$ má tečnu $x + y + 2 = 0$. Určete parametr p a souřadnice bodu dotyku T.
4. Napište rovnice všech přímek, které procházejí bodem M [ 0;–1] a mají s parabolou $x^2 - 4x - y + 3 = 0$ společný právě jeden bod.
5. Určete rovnice tečen k dané kružnici, které procházejí bodem P[ 9 ; 2], je-li rovnice kružnice: k: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ .
6. Určete tečnu elipsy o rovnici $9x^2 + 25y^2 = 225$, rovnoběžnou s přímkou p: $4x + 5y - 7 = 0$.
7. Napište rovnici přímky, která prochází středy kružnic:
   $k_1 : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$
   $k_2 : x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$
8. Napište rovnici kružnice, která má poloměr r = 5 cm, prochází bodem Q[3 ; 5] a její střed leží na přímce p: $2x + 3y - 4 = 0$.
9. Určete střed, poloosy a excentricitu elipsy: $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$.
10. Napište rovnici kolmice k přímce p: $2x - 3y - 4 = 0$ tak, aby procházela ohniskem F [ 0; –e] elipsy o rovnici $25x^2 + 9y^2 = 100$.